



Estudio de la noción de límite en España durante el siglo XIX: primeros resultados

Mónica Arnal-Palacián, Universidad de Zaragoza, marnalp@unizar.es, Javier Claros-Mellado, IES Calderón de la Barca de Pinto

Resumen

En esta comunicación se presentan los primeros resultados que se han realizado sobre una investigación que tiene por objetivo el estudio del límite en manuales de matemáticas del siglo XIX. El marco teórico utilizado ha sido la fenomenología, el pensamiento matemático avanzado y los sistemas de representación, el cual ha demostrado ser un instrumento útil para el análisis de textos históricos de matemáticas. Como ejemplo se presenta un libro que, evidencia que los fenómenos intuitivos y formales están presentes en el desarrollo de la noción de límite que se estaba gestando en dicho siglo. La presencia de dichos fenómenos en los manuales permitirá también clasificarlos dentro del pensamiento matemático elemental o avanzado.

Palabras clave:

Manuales de matemáticas, límite, fenómenos, matemáticas en España, siglo XIX

Objetivos o propósitos:

Durante todo el siglo XX y los primeros años del siglo XXI, los libros de texto españoles han ido modificando la manera de presentar la noción de límite. Desde una perspectiva fenomenológica, en el sentido dado por Freudenthal (1983), Claros et al. (2016) estudiaron el uso de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación asociados al límite finito de una sucesión y al límite finito de una función en un punto en libros de texto de matemáticas desde 1936-2005. En Arnal-Palacián et al. (2020) se estudiaron los fenómenos de crecimiento, decrecimiento intuitivo y retroalimentación asociados al límite infinito de una sucesión en libros de texto de matemáticas desde 1936-2019.

En ambos estudios realizados se confirmó la presencia de los fenómenos asociados a cada uno de los límites mencionados con anterioridad. Estos estudios se producen una vez que la definición de límite ha sido formalizada, por Weierstrass y Heine siendo este último en 1876 el encargado de su formalización definitiva (Boyer, 1999), y ha pasado un tiempo suficiente para que se haya extendido a los manuales de matemáticas.

El objetivo general de esta investigación, de la que presentamos resultados preliminares, es completar los dos estudios realizados con anterioridad sobre la presentación del límite en libros de texto de matemáticas del siglo XX. Para ello, nos centraremos en esta noción en manuales de matemáticas del siglo XIX, coincidiendo con el desarrollo formal de su definición. El objetivo específico es presentar la estructura de la investigación y un estudio de caso de la misma.

Organizado por:





Marco teórico:

La fundamentación teórica en la que se sustenta esta investigación considera los estudios históricos de libros de texto, la fenomenología (Freudenthal, 1983), el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991) y los sistemas de representación (Janvier, 1987; Castro y Castro, 1997). Este marco teórico ya fue usado en Claros (2010), Sánchez (2012) y Arnal-Palacián (2019).

El estudio de libros de texto históricos puede arrojar luz sobre cómo se ha constituido una noción en la actualidad. Son muchos los autores que se han ocupado del estudio de textos históricos de matemáticas en el campo de la didáctica en los últimos años (González, 2004; Maz, 1999; Meavilla y Oller, 2016; Picado y Rico, 2011; Sierra, 1997; entre otros). Este desarrollo también permite mostrar las dificultades epistemológicas asociadas a la noción en cuestión y sin duda puede ayudar a comprender mejor las dificultades que surgen en los alumnos cuando se les presenta. En particular, Picado y Rico (2011) estudiaron textos de matemáticas de la segunda mitad del siglo XIX, centrándose en el sistema métrico decimal, y Sánchez-Sierra y González-Astudillo (2017) la geometría analítica en manuales en este mismo siglo.

Freudenthal (1983) da el nombre de “fenomenología” a su método de análisis de los contenidos matemáticos en el que se parte de la contraposición entre los términos noúmeno y fenómeno. Esta reflexión filosófica parte de la contraposición entre los objetos construidos en conceptos, que son denominados objetos del pensamiento, “noúmenos”, y las situaciones que estos objetos matemáticos organizan, “fenómenos”.

Actualmente, para la noción de límite se han caracterizado algunos fenómenos en estudios previos: fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i.) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.) para el límite finito de una sucesión (Claros, 2010). En el límite finito de una función en un punto los fenómenos que debemos observar son: aproximación doble intuitiva (a.d.i.) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en funciones (i.v.f.) (Sánchez, 2012). En el límite infinito de una sucesión los fenómenos a observar son: crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i) (Arnal-Palacián, 2019).

Organizado por:





Tall (1991) situó la noción de límite dentro del Pensamiento Matemático Avanzado, PMA, por los procesos cognitivos que implica para su manejo. Cornu (1991) coincidió con Tall en situarlo en el PMA, pero justificando su postura en que se trata de una pieza fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración. Tall (1991) afirmó que el paso del pensamiento matemático elemental, PME, al PMA exige una transición que requiere una reconstrucción cognitiva con la cual se pasa, por un lado, de “describir” a “definir” y por otro de “convencer” a “demostrar”. Los fenómenos intuitivos forman parte del PME mientras que los fenómenos de retroalimentación forman parte del PMA. La observación de uno u otros fenómenos ayudará a clasificar también el libro que estamos manejando.

El último pilar en el que se apoya esta investigación es el de los sistemas de representación. Cuando hablamos de ellos asociados al límite nos referimos a los siguientes: verbal, gráfico, tabular y simbólico. Estos fueron señalados por Janvier (1987) y Blázquez y Ortega (2001). Entendemos el término sistema de representación según Castro y Castro (1997) que lo define como un conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática. Además de los sistemas de representación distinguiremos el formato en el que aparezcan los fenómenos: ejemplo o definición. Así podremos identificar en un libro, por ejemplo, el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación simbólico y en el formato definición.

Metodología:

Este estudio se desarrolla en el marco de una investigación analítica, empleada para el análisis histórico (McMillan y Schumacher, 2005) de manuales del siglo XIX que abordan la noción de límite. Para el análisis de su contenido, focalizamos en el contenido matemático; atendiendo a los conceptos, sistemas de representación y fenomenología (Gómez, 2002), aunque de manera conjunta y no como tres categorías diferentes. De esta manera, seguimos los pilares fundamentales del trabajo con manuales realizado por Meavilla y Oller (2016), aunque ellos profundizaron en la geometría de finales del siglo XIX.

La muestra la componen 21 textos matemáticos españoles (ver Tabla 1). Entre ellos, se encuentran 19 manuales utilizados en diferentes Facultades de Ciencias, Escuelas de Ingeniería, Academia de Artillería, Colegio General Militar, entre otros. Además, también se han considerado 2 discursos ofrecidos en distintas facultades que posteriormente fueron publicados. Entre los autores encontramos: doctores y catedráticos en ciencias matemáticas y/o físicas, como Miguel Vegas y Puebla-Collado; militares, como José de Odriozola; y sacerdotes, como Jacinto Feliú. Todas las publicaciones han sido consultadas en la Biblioteca Digital Hispánica gestionada por la Biblioteca Nacional de España.

Organizado por:





TÍTULO	AÑO	AUTOR
Compendio de matemáticas puras y mixtas para instrucción de la juventud	1802	F. Verdejo González
Tratado elemental de matemáticas	1813	J.M. Vallejo
Compendio de matemáticas puras y mixtas	1818	J.M. Vallejo
Elementos de Matemáticas puras y mixtas	1823	A. Lista y Aragón
Curso completo matemáticas puras	1827	J. Odriozola
Tratado completo de matemáticas. Tomo IV	1846	A. Gómez Santa María
Tratado elemental de matemáticas	1847	J. Feliú
Tratado de Geometría analítica	1862	J. Cortazar
Discurso sobre la naturaleza y el cálculo infinitesimal	1865	D. Gorroño
Idea general de la naturaleza y el cálculo infinitesimal	1873	P. Cassinello
Curso de análisis trascendente	1876	D. Bueno
Lecciones de geometría analítica	1883	S. Mundi y Giró
Elementos de Geometría analítica	1883	J. M. Villafañe y Viñals
Lecciones de cálculo infinitesimal	1884	A. Miranda
Curso de cálculo infinitesimal	1889	D. Ollero y T. Pérez Griñón
Introducción al estudio del cálculo infinitesimal	1890	H. Betanbol y Ureta
Tratado de análisis matemático	1892	J.M. Villafañe y Viñals
Tratado de Geometría analítica	1894	M. Vegas y Puebla-Collado
Justa interpretación que debe darse al cero y al infinito matemático	1898	J. Domenech y Estepá
Programa y cuestionario. Análisis matemático (2º)	1898	M. Marzal y Bertomeu
Tratado de análisis matemático. Tomo I y II.	1898	J.M. Villafañe y Viñals

Tabla 1. Muestra considerada en el estudio.

En cada uno de estos manuales, se pretende detectar los fenómenos anteriormente señalados; el enfoque: intuitivo y formal; los sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico; y el formato: ejemplo y definición. Sirva a modo ejemplo Figura 1.

Organizado por:





Luego 1.º si admitimos que el quebrado $\frac{1}{b}$ haya llegado al mayor grado de incremento de que es capaz por haber ido decreciendo sucesivamente su denominador hasta desaparecer, ó hasta aquel grado de decremento en que la diferencia entre él y cero sea nula,

Figura 1. Fragmento del manual de Verdejo (1802, p.1), a.s.i. Sistema representación verbal y formato ejemplo.

Discusión de los datos, evidencias, objetos o materiales:

De entre todos los manuales considerados, presentamos los resultados del manual más antiguo de los que componen la muestra *Compendio de matemáticas puras y mixtas para la instrucción de la Juventud* de Francisco Verdejo González, publicado en 1802. Este texto se compuso de dos tomos, el primero de ellos situado a finales del siglo XVIII, mientras que el Tomo II, que contiene la noción de límite, ya se encuentra en el siglo XIX. Su situación histórica nos permite examinar el punto de partida de esta noción en el siglo XIX, y poder contemplar la posible evolución durante todo el siglo. Este manual presenta la noción de límite únicamente para las sucesiones, desde una perspectiva aritmética. Véase Figura 2.

La elección de este manual, además de ser el primero en ver la luz en el siglo estudiado, ha venido determinada por permitir observar fenómenos para el límite finito y para el límite infinito, además de aunar tanto el enfoque intuitivo como el enfoque formal.

Su autor, Francisco Verdejo, fue catedrático de matemáticas y desempeñó su labor docente en el Colegio Imperial de Madrid, y su texto sustituyó al de Benito Bails (Díe-Fagoaga, 2010).

Organizado por:





COMPENDIO DE MATEMÁTICAS

PURAS Y MIXTAS

PARA INSTRUCCION DE LA JUVENTUD

POR D. FRANCISCO VERDEJO GONZALEZ,
*Catedrático de Matemáticas de los Reales Estudios
de esta Corte.*

T O M O I I.

DIVIDIDO EN DOS PARTES,

En las que se trata del infinito é infinitamente pequeño , y las cantidades que se reducen á cero , de las Series , Equaciones superiores , aplicacion del Álgebra á la Geometria , Secciones cónicas , Cálculo infinitesimal , Dinámica é Hidrodinámica y la Tabla de las gravedades específicas.



MADRID MDCCCII.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.

CON LICENCIA.

Se hallará en la librería de Gomez , calle de las Carretas.

Figura 2. Portada del manual *Compendio de matemáticas puras y mixtas para la instrucción de la Juventud*.

La estructura del capítulo 1 “Del infinito e infinitamente pequeño, y cantidades que se reducen a cero” es:

1. Presentación del infinito a partir de un ejemplo.
2. Definición de infinito como límite de lo finito.
3. Definición del cero como cantidades que decrecen continuamente, y definido como una cantidad infinitamente pequeña.
4. Definición de cantidades que tienen límite distinto de cero o infinito.
5. Ejemplos geométricos de aplicación del límite.
6. Introducción de la indeterminación $0/0$ e infinito/infinito.
7. Ejemplo de la indeterminación $0/0$.
8. Introducción a la comparación de infinitos. Presentación de ejemplos.

Además, en este manual se han encontrado 9 fragmentos en los que se han identificado los fenómenos: a.s.i., c-i.i. e i.v.s.i.

Organizado por:





El enfoque intuitivo se presenta de manera dominante (88,88 %), principalmente en el formato ejemplo. Respecto al enfoque formal solamente hemos identificado un único fragmento, para el límite infinito. Los fenómenos encontrados se reparten de manera equilibrada entre los asociados al límite finito de una sucesión, 55,56 %, frente a los del límite infinito de una sucesión, 44,44 %. Véase Tabla 2. Además, en todas las ocasiones el sistema de representación empleado es el verbal.

ENFOQUE	FENÓMENOS	FORMATO	
		EJEMPLO	DEFINICIÓN
Intuitivo	a.s.i.	3	2
	a.d.i.		
	c-i.i.	2	1
	d-i.i.		
Formal	i.v.s.		
	i.v.f.		
	i.v.s.i.	1	

Tabla 2. Ficha fenomenológica del manual analizado.

A continuación, presentamos algunos fragmentos de los fenómenos identificados. Véase Figura 3, Figura 4 y Figura 5.

Luego el cero es el límite de las cantidades que decrecen continuamente hasta desvanecerse, y dicha cantidad se llama: *cantidad infinitamente pequeña* en contraposición del ∞ ,

Figura 3. Fragmento del manual de Verdejo (1802, p.2), a.s.i. Sistema representación verbal y formato definición.

Luego si el denominador de un quebrado le dividimos sucesivamente por los números 2, 3, 4, 5, 6, &c. conservándose su numerador el mismo, el quebrado irá siendo 2, 3, 4, &c. veces mayor que era, y se irá acercando cada vez mas y mas á la mayor cantidad que podemos imaginar.

Figura 4. Fragmento del manual de Verdejo (1802, p.1), c-i.i. Sistema representación verbal y formato ejemplo.



y aunque desde luego se infiere que el quebrado
jamás podrá alcanzar dicha cantidad, no por eso dexará
de acercarse á él tanto quanto nos acomode ;

Figura 5. Fragmento del manual de Verdejo (1802, p.1), i.v.s.i. Sistema representación verbal y formato definición.

Resultados y/o conclusiones:

Los resultados que arroja este estudio, todavía en un estado incipiente, han podido lograrse gracias a la base teórica construida en los estudios previos de manuales de matemáticas del siglo XIX (Maz, 1999; Meavilla y Oller, 2016; Picado y Rico, 2011; Sierra, 1997) y también gracias a la experiencia adquirida en los estudios de libros de texto del siglo XX sobre el límite finito de una sucesión y de una función en un punto (Claros et al., 2016) y el límite infinito de una sucesión (Arnal-Palacián et al., 2020). En este estudio, identificamos los fenómenos ya definidos en Claros (2010), Sánchez (2012) y Arnal-Palacián (2019), en el sentido dado por Freudenthal (1983), organizados a partir de algunas definiciones del límite. Además, hemos podido clasificar los manuales empleados dentro del PME o del PMA. De hecho, diremos que un manual pertenece al PME si es mayor el número de fenómenos intuitivos que aparecen en él respecto a los fenómenos formales. En caso contrario, diremos que dicho manual pertenece al PMA. Con ello, contribuimos a los estudios de Tall (1991) en la clasificación de los manuales matemáticos. Respecto a los sistemas de representación asociados a la noción de límite (Blázquez y Ortega, 2001) señalamos que solo hemos podido contemplar en el manual analizado el sistema de representación verbal. Queda pendiente ver si esto constituye un hecho puntual o si por el contrario es la tónica habitual en el resto de manuales del siglo XIX, lo que supondría una diferencia respecto al estudio de libros de texto del siglo XX (Arnal-Palacián et al. 2020).

En el libro presentado para esta comunicación (Verdejo-González, 1802), hemos podido encontrar los siguientes fenómenos: aproximación simple intuitiva, a.s.i., definido en Claros (2010), crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i., e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, i.v.s.i., ambos caracterizados en Arnal-Palacián (2019). Situamos este manual en el PME, ya que predomina el enfoque intuitivo frente al formal. Además, el límite ha sido desarrollado exclusivamente para sucesiones, y no para funciones, por este motivo no parecen los fenómenos asociados al límite funcional a.d.i. e i.v.f. (Sánchez, 2012).

Como perspectivas futuras inmediatas contemplamos la finalización del análisis de todos los manuales considerados, así como el estudio de la vinculación de la noción de límite a la aritmética y a la geometría en el siglo XIX, momento en el que se formalizó el concepto de límite de una función.

Organizado por:





Contribuciones y significación científica de este trabajo:

Los resultados de esta comunicación se conciben como una primera aproximación a la noción de límite en los manuales matemáticos del siglo XIX desde la identificación de los fenómenos, el PMA y los sistemas de representación.

Este trabajo ha sido parcialmente desarrollado en el grupo S60_20R-Investigación en Educación Matemática en el ámbito de la Comunidad Autónoma de Aragón para el periodo 2020-2022 y en el grupo HUM-324 del PAIDI de la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Bibliografía:

- Arnal-Palacián, M. (2019). *Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Universidad Complutense de Madrid: Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Madrid, España.
- Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compañía, M. T. Límite infinito de sucesiones en libros de texto españoles: desde 1936 hasta 2019. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 14(4), 295-322.
- Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(3), 219-236.
- Boyer, C.B (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. (pp. 95-124). Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, España.
- Claros, J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Universidad de Granada: Departamento Didáctica de las Matemáticas, Granada, España.
- Claros, J., Sánchez, M.T., & Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación matemática*, 28(1), 125-152.
- Díe- Fagoaga, G. (2010). Francisco Verdejo, un mathematico olvidado, Madrid, Bubok.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrech: Reidel Publishing Company.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.
- González, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 45, 17-28.

Organizado por:





- Janvier, C. (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Maz, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En M^a.I. Berenger, J. M^a Cardeñoso, y M. Toquero (Eds.) (1999). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la matemática
- McMillan, J.H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Meavilla, M., & Oller, A. (2016). La formación de maestros y maestras elementales en España a finales del siglo XIX. El caso de la geometría. *Contextos educativos, Extr. 1*, 79-96
- Picado, M., & Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.
- Sánchez, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Departamento Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, Granada, España.
- Sánchez-Sierra, I.M., & González-Astudillo, M.T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 35(3), 89-106.
- Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En L.Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 179-194). Barcelona, España: Horsori.
- Tall, D. (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Advanced mathematical thinking*. Dordrech: Kluwer.

Organizado por:

