



# #CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

## Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies

Sergio Martínez-Juste (Universidad de Zaragoza)  
sergiomj@unizar.es

Resumen: En este trabajo presentamos la experiencia llevada a cabo en un centro de secundaria en la que se creó un grupo de trabajo cooperativo de profesores de matemáticas que participó en dos Lesson Study. En la primera se diseñó, y se puso en marcha durante dos ciclos de Investigación-Acción, una propuesta innovadora para la fracción en 1º de ESO. En la segunda, se trabajó con una propuesta de enseñanza de la proporcionalidad aritmética desarrollada en investigaciones previas. La experiencia muestra el potencial de las Lesson Study, no solo para promover la mejora del conocimiento práctico de los docentes implicados, sino también para el desarrollo y consolidación de unidades didácticas innovadoras.

Palabras clave: Lesson Study, innovación, proporcionalidad aritmética, fracción, secundaria.

### 1. Introducción y objetivos:

---

Uno de los fines de la investigación en educación matemática es la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, las experiencias de Investigación-Acción (I-A) llevadas a cabo por docentes en sus propias aulas resultan especialmente interesantes para el desarrollo curricular (Elliot, 1990), y la mejora de la instrucción, acercando teoría educativa y práctica educativa (McNiff, 2013).

De entre los numerosos contenidos de las matemáticas escolares susceptibles de mejora, este trabajo lo contextualizamos alrededor de los contenidos asociados al número racional positivo y la proporcionalidad aritmética.

En concreto, expondremos la implementación de varios ciclos I-A mediante el desarrollo de Lesson Studies (LS) como parte de un proyecto de innovación para el desarrollo de la competencia matemática en un centro de secundaria. De entre los objetivos de dicho proyecto, nos centraremos en los siguientes:

**Objetivo I:** Implantar una metodología de trabajo cooperativo y observación dentro del aula entre los miembros del departamento, siguiendo el modelo LS.

**Objetivo II:** Elaborar o implementar unidades didácticas (UD) innovadoras que recojan avances de la investigación en didáctica de la matemática para la fracción y la proporcionalidad.

---

Organizado por:





# #CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

## 2. Marco teórico:

---

Uno de los contenidos clave en las matemáticas escolares es el de la proporcionalidad (Lesh, Post, & Behr, 1988). Además, el razonamiento proporcional está ligado a la comprensión del número racional. Un adecuado razonamiento proporcional implica la necesidad de conocer y conectar diferentes significados del número racional y ser competente en la aplicación y uso de diferentes razonamientos y sistemas de representación (Lamon, 2012).

Escolano (2007) y Escolano y Gairín (2005) proponen la enseñanza de la fracción mediante un modelo concreto que permite realizar un aprendizaje constructivista del racional con significado de medida. A partir de la construcción de dicho significado se trabaja la conexión con otros significados de la fracción como los de reparto y razón. Este último, se convierte en el concepto central de propuestas de innovación curricular para la proporcionalidad aritmética (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, en prensa; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, & Pecharromán, 2014; Oller-Marcén, 2012). Dichas propuestas mejoran deficiencias de la enseñanza tradicional para la fracción y la proporcionalidad aritmética señaladas en los análisis de libros de texto (Gairín & Muñoz-Escolano, 2005; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, & Ortega, 2017). Estas investigaciones sobre libros de texto destacan la escasa variedad en la tipología de tareas presentadas y la orientación hacia la aplicación acrítica de técnicas y de algoritmos de resolución con operaciones descontextualizadas.

## 3. Marco metodológico:

---

Como indican Lewis, Perry y Murata (2006), LS es el término inglés para el término japonés formado por “jugyou”, instrucción, lección, lecciones, y “kenkyuu”, investigación o estudio. El término LS alude a las estrategias de desarrollo y perfeccionamiento instruccional llevadas a cabo en Japón cuyo nexos común es la “observación en persona de sesiones de clase por un grupo de profesores que recogen datos sobre la enseñanza y aprendizaje y los analizan colaborativamente” (Lewis et al., 2006, p. 3). Como indica Elliot (2015), es un tipo de I-A realizada por grupos de docentes que trabajan cooperativamente. La particularidad es que uno de los miembros del grupo imparte la lección mientras los demás miembros observan.

Las fases en las que distintos autores estructuran una LS pueden variar, pero mantienen un sustrato común. Para Ono y Ferreira (2010) una LS se compone de tres fases: *planificación, acción y reflexión*. Al ser las LS una forma particular de I-A, las etapas anteriores guardan una estrecha relación con las de la I-A: planificación, acción, observación y reflexión (Elliot, 1990; McNiff, 2013). Como puede observarse, las etapas de acción y observación de la I-A quedan unidas en la etapa de acción de una LS ya que en las LS los participantes realizan la acción y la

Organizado por:





observación de forma simultánea. Otros autores, destacan una fase de *estudio*, o *investigación*, previa a la planificación (ver Figura 1) refinando las fases anteriores (Lewis, Perry, & Hurd, 2009; Lewis et al., 2006). Estas fases se suceden cíclicamente, de forma que el profesor observado pasa a ser observador y uno de los observadores imparte la lección en el siguiente ciclo.

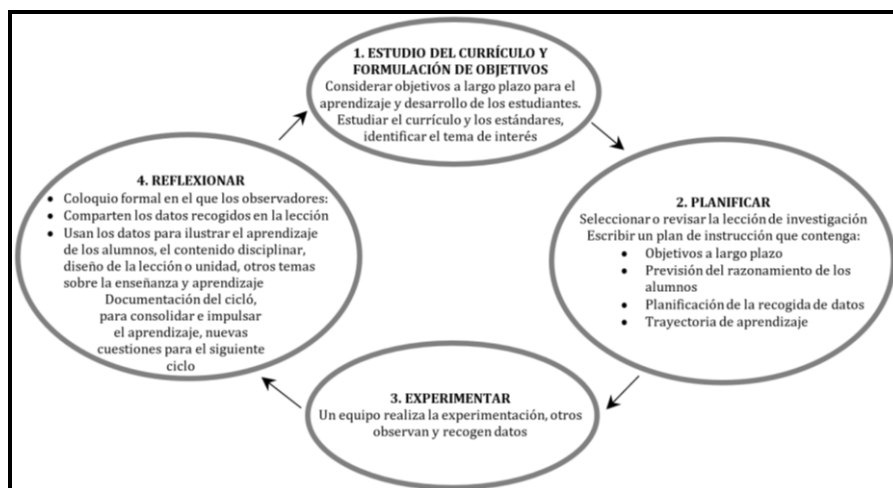


Figura 1. Fases de una LS (Lewis, Perry, & Murata, 2006)

#### 4. Método:

La experimentación que se presenta se llevó a cabo en el “IES Pilar Lorengar” de Zaragoza. En concreto, se actuó sobre 57 alumnos de dos grupos de 1º de ESO. El grupo de trabajo colaborativo docente estuvo formado por 8 profesores de matemáticas del centro. Para crear un espacio común de trabajo, se solicitó un Seminario de Didáctica de las Matemáticas en el Centro, reconocido como curso de formación permanente.

Se desarrollaron dos LS, cada una con dos ciclos de I-A siguiendo las etapas de Lewis et al. (2009). La primera se centró en crear y experimentar una UD para la fracción. La segunda, se centró en la consolidación y transferencia de una UD para la proporcionalidad aritmética (ver Tabla 1).

	Contenido		N.º alumnos	Profesor
<b>Lesson Study I</b>	Fracción	Ciclo I.1	28	A
		Ciclo I.2	29	B
<b>Lesson Study II</b>	Proporcionalidad	Ciclo II.1	28	A
		Ciclo II.2	28	B

Tabla 1. Ciclos y muestra experimental para las LS desarrolladas.



# #CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

Las fases de estudio e investigación, planificación y reflexión de cada ciclo se realizaron en sesiones del seminario. Para las fases de estudio los miembros del grupo recibieron asesoramiento de expertos en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza sobre el análisis didáctico (Gómez, 2002) de cada tema.

Para la planificación de la primera LS se optó por crear una UD para la fracción inspirada en la de Escolano (2007). Para la segunda LS se seleccionó una UD para la proporcionalidad, desarrollada previamente por el autor, basada en la de Oller-Marcén (2012) y que se muestra, en parte, en los trabajos de Martínez-Juste et al. (2014) y Martínez-Juste et al. (en prensa).

La fase de acción de los ciclos iniciales de cada LS se llevó a cabo en el grupo de alumnos al que el autor (en adelante profesor A) imparte docencia. Los segundos ciclos se desarrollaron en un grupo en el que imparte docencia otra profesora del departamento (en adelante profesora B) ajena a la investigación en educación matemática (ver Tabla 1). La profesora B asistió como observador a las sesiones impartidas por el profesor A. El profesor A asistió como observador a todas las sesiones impartidas por la profesora B. Los demás integrantes del grupo asistieron esporádicamente a las sesiones de clase (fase de acción), pero participaron en todas las sesiones asociadas al resto de fases.

Los profesores participantes recogieron información con diferentes instrumentos: diario de clase, fichas de observación, producciones de los alumnos y pruebas escritas. Dicha información, compartida con el grupo, sirvió de base para la fase de reflexión.

## 5. Resultados y discusión:

---

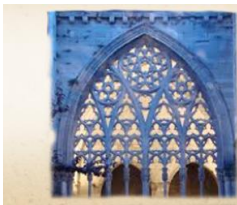
Como resultado de las fases de estudio y planificación del primer ciclo de I-A en la LS en torno a la enseñanza-aprendizaje de la fracción se diseñó una UD que resulta innovadora en los siguientes aspectos:

- Construye los contenidos asociados a la fracción (equivalencia, orden, densidad y operaciones) desde el modelo de medida, frente a la práctica educativa tradicional que lo hace desde el modelo parte-todo (Escolano, 2007).
- Prioriza la resolución de tareas contextualizadas y minimiza las operaciones formales, una de las deficiencias señaladas por Gairín y Muñoz-Escalano (2005) en los libros de texto de secundaria.
- Potencia la utilización y conexión de diferentes sistemas de representación (tangibles, gráficos, verbales y simbólicos).

---

Organizado por:





# #CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

## Educación: La puerta a toda mejora social

Tenéis que expresar lo que miden de LARGO los siguientes trozos de papiro que os vamos a entregar usando como unidad de medida 1 Bu.

Los trozos de papiro no se pueden romper ni doblar y pintados lo menos posible. Los Bu's se pueden doblar y cortar. Recordad que tenemos que medir el largo de los papiros de la forma más exacta posible.

Una vez que tengáis el resultado comentadlo con el profesor y rellenad la ficha:

1. Representando cómo habéis medio el papiro.
2. Expresando el resultado en forma de fracción.

**EJERCICIO 1:**

Resultado: El papiro número 1 mide:  $\frac{2}{5}$  Bu

Figura 2. Actividades contextualizadas y manipulativas para la construcción del significado de medida para la fracción y la conexión entre representaciones.

- Promociona el sentido numérico de los alumnos.

[8.3] El resultado de multiplicar  $\frac{40}{13}$  y  $\frac{301}{153}$  es aproximadamente:

- a) 2 unidades.
- b) 4 unidades.
- c) 6 unidades.
- d) Imposible saberlo sin hacer cuentas.

• RAZONAMIENTO → He pensado que 40 es aproximadamente el triple que trece así que  $\frac{40}{13}$  serían 3 unidades aproximadamente, también he pensado que 301 es el doble que 153 aproximadamente, así que  $\frac{301}{153}$  serían 2 unidades y  $3 \times 2$  es 6.

Figura 3. Tarea de sentido numérico.

- Fomenta la creatividad y genera situaciones de alta demanda cognitiva a través de tareas de invención de problemas (Singer, Ellerton, & Cai, 2013).

[6] (1,25 puntos) Invéntate el enunciado de un problema REALISTA que se resuelva utilizando exactamente la siguiente operación

$$\frac{7}{5} - \frac{3}{4}$$

Donde las fracciones aparezcan en el enunciado como cantidades expresadas en KILOGRAMOS. Resuelve el problema.

Si mi estuche pesa  $\frac{7}{5}$  Kg y el estuche de Pedro  $\frac{3}{4}$  Kg ¿Cuánto pesa más mi estuche que el de Pedro?

$\frac{7}{5} - \frac{3}{4} = \frac{28}{20} - \frac{15}{20} = \frac{13}{20}$  Kg más pesa mi estuche

Figura 4. Actividad de invención de problemas.

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

- Conecta y trabaja algunos significados de la fracción especialmente los de medida, operador y parte-todo. La conexión se hace ampliando la tipología tradicional de tareas con problemas de razonamiento “up and down” como las propuestas por Lamon (2012).

[9] La siguiente barra representa una longitud de  $\frac{3}{4}$  km.

a) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer  $\frac{9}{4}$  km. Píntala en rojo.

b) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer  $\frac{5}{2}$  km. Píntala en azul.

c) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer  $\frac{11}{8}$  km. Píntala en negro.

Figura 5. Actividad de razonamiento “up and down”.

A partir de las fases de acción y reflexión, se refinó la propuesta didáctica para intentar acortar su duración, ya que la secuencia inicial sobrepasó el número de sesiones planificadas. Este objetivo se consiguió ya que se dedicaron 4 sesiones menos en el segundo ciclo. Como consecuencia de este segundo ciclo de I-A se generaron materiales de refuerzo y de ampliación que no se habían programado inicialmente.

En la segunda LS se experimentó con una UD existente para la proporcionalidad aritmética. Como resultado de los dos ciclos de I-A sobre esta propuesta se consolidó y mejoró el planteamiento inicial:

- La profesora B, desconocedora de la propuesta, asumió el discurso argumentativo alrededor del concepto de razón en el primer ciclo de I-A y llevó a cabo la propuesta en el segundo, respetando la estructura diseñada. Este hecho, ejemplifica la potencia de las LS como vehículo de transferencia entre el conocimiento teórico y el práctico. Además, supone un indicador del desarrollo del conocimiento de la profesora B.
- Se enriqueció la secuencia introduciendo actividades de invención de problemas que no se contemplaban en la propuesta original.

Organizado por:





# #CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

Teniendo en cuenta la tabla que hemos completado en clase, y lo que hemos hablado, piensa en 4 situaciones, de forma que se cumplan las condiciones dadas en la tabla.

SITUACIÓN INVENTADA	Hay 2 magnitudes	Tienen relación	Cumple CR
Hace 1 hora compré 2 kg de peras.	sí	no	no
Mi DNI es 743555x y mido 1'56 m.	no	no	no
Peso 42 kg y mido 1'56 m.	sí	si	no
Hago un pastel con 20 g de harina y 0'25 l de aceite.	si	si	si

Figura 6. Invención de tareas para la proporcionalidad.

- Se crearon materiales de refuerzo y de ampliación y materiales informáticos para institucionalizar los conceptos mediante el empleo de la pizarra digital.
- El grupo de trabajo acordó modificar la programación didáctica para reflejar los cambios que se planteaban en la propuesta, lo que supone un ejemplo de desarrollo curricular mediante un proceso de I-A basado en LS (Elliot, 2015).

Estos resultados, concuerdan con los de Lewis et al. (2009): “una LS mejora la instrucción desarrollando el conocimiento de los profesores (del contenido, pedagógico y cognitivo), construyendo una comunidad profesional de profesores y mejorando los materiales de enseñanza”.

## 6. Conclusiones y contribuciones de este trabajo:

En este trabajo se relata parte de la implementación de la metodología de trabajo cooperativo a través del desarrollo de LS y cómo ésta realiza contribuciones a la investigación en educación matemática en tres aspectos principales:

1. Presentamos un modelo de incorporación al sistema educativo español de la metodología de I-A basada en el desarrollo de LS. Durante el proyecto se han desarrollado dos LS, y está previsto desarrollar una tercera, en torno a la enseñanza de la probabilidad, en un centro público de secundaria, utilizando los recursos establecidos por las administraciones educativas. En el proyecto participan exclusivamente profesores del propio centro.
2. Como consecuencia de la experiencia se ha creado una UD innovadora para la enseñanza de la fracción en 1º de ESO. La UD incorpora propuestas de la investigación y se ha sometido a dos ciclos de I-A para perfeccionar el diseño inicial. Los materiales generados pueden ser útiles para su utilización por otros docentes. Así, el desarrollo de la primera LS realiza una aportación a la innovación curricular mediante un proceso de investigación educativa.

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

- Mediante la segunda LS, se ha consolidado una UD para la proporcionalidad hecha desde la investigación. El proceso ha adaptado las características metodológicas iniciales de la propuesta, propias de una investigación experimental, para desarrollar una UD accesible a todo el y se han creado materiales de refuerzo y ampliación. Esta experiencia constituye un ejemplo de transferencia entre investigación y práctica educativa.

## 7. Bibliografía:

---

- Elliot, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.
- Elliot, J. (2015). Lesson and Learning study and the idea of the teacher as a researcher. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 29(3), 29-46.
- Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*. (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.
- Escolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 17-35.
- Gairín, J. M., & Muñoz-Escolano, J. M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. En *Investigación en Educación Matemática IX*. Córdoba: SEIEM.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3ª ed.). Nueva York: Routledge.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.
- Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of mathematics teacher education*, 12(4), 285-304.
- Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational researcher*, 35(3), 3-14.

---

Organizado por:







#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

- Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (En prensa). Una experiencia de Investigación-Acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., & Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 20(1), 95-122.
- Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., & Pecharromán, C. (2014). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 459-470). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.
- McNiff, J. (2013). *Action Research: principles and practice*. Nueva York: Routledge.
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1-7.
- Oller-Marcén, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- Ono, Y., & Ferreira, J. (2010). A case study of continuing teacher professional development through lesson study in South Africa. *South African Journal of Education*, 30(1).

---

Organizado por:

