Dificultades en la comprensión de operaciones de números con signo en alumnos de secundaria

José Ángel Arroyo Terán; Eduardo García Vega.
garciae39@uabc.edu.mx

1. Objetivos o propósitos:

La presente investigación tiene como propósito identificar las dificultades y errores que presenta el alumno en la construcción de su conocimiento matemático, en esta ocasión se hace énfasis en el tema de operaciones de números con signo, el cual, al parecer es un contenido que se puede considerar sencillo, pero para el alumno no lo es. Esta situación, es el principal interés de la investigación, comprender por qué al alumno se le dificulta dicho tema y que se puede hacer para que construya de manera más fácil su conocimiento. Por tanto, se examina a profundidad las razones por las que surgen las dificultades y errores sobre el aprendizaje del estudiante en secundaria. Además se hace una comparación de dos contextos escolares diferentes, una escuela pública y otra privada, pero que comparten la misma problemática sobre las operaciones de números con signo.

Se sabe que los errores forman parte del rendimiento escolar de los alumnos y, de igual manera, del proceso de aprendizaje. Así mismo estos errores pueden ser utilizados para evaluar el conocimiento del alumno, pero es deber del docente reducir la cantidad de errores que surjan en el estudiante. Como menciona Godino (2004), "hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar."(p. 73). De lo anterior se entiende por error cuando el alumno realiza procesos que no son admitidos en el ámbito de las matemáticas. El aprendizaje de la suma y resta de números con signo ha sido un tema que ocasiona confusión en los alumnos provocando que estos puedan utilizar procedimientos no válidos.

Según Socas (1997) respecto a algunas investigaciones, se afirma que las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas, sino que se le pueden presentar a cualquier alumno. Antes de abordar sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es necesario conocer qué se entiende por dificultades, Godino (2003) afirma lo siguiente:

> El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. (p. 73)

De lo anterior se entiende que al evaluar el rendimiento del grupo sobre alguna tarea o actividad y el resultado de esta menciona que la mayor parte del grupo tiene respuestas incorrectas la cual señala que el índice de dificultad es alto pero si el número de respuestas correctas predomina indica que el índice de dificultad es bajo.

1.1 Planteamiento del problema

En el tiempo que se lleva realizando las prácticas profesionales a nivel básico en las secundarias, Colegio Morelos, escuela privada y Escuela Secundaria No. 16 “De Prácticas para Pedagogía”, escuela pública, ligadas a la asignatura de Investigación aplicada a la disciplina, durante las clases en las que se ha estado de apoyo al docente y en algunas clases frente a grupo se ha podido observar y de alguna manera comprobar que una de las problemáticas que existe con los alumnos de primer grado es la comprensión en el tema de operaciones de números con signo, ya que se confunde cuando ve los signos ordenados de diferente manera y no puede realizar la adición o sustracción de los números con signo.

Por ejemplo una de las operaciones donde los alumnos presentan mayor dificultad es la siguiente: (7) - (8) = -1. De manera que el alumno no logra comprender qué procedimiento debe seguir cuando se encuentran con operaciones donde dentro del paréntesis no tiene ningún signo, ya que se sabe que cuando un número no tiene ningún signo se da por hecho que es positivo, provocando confusión y muchas de las veces errores. Como también no comprenden que se multiplica los números con signos diferentes o iguales.

Según Socas (1997) las dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje de los alumnos suelen ocasionarse por diversos factores y se pueden abordar de distintos puntos de vista, en este caso deberá ser abordado de manera que se refuerce la teoría referente al tema de *dificultades en la comprensión de operaciones de números con signo en alumnos de secundaria* con la práctica educativa. Estas dificultades asociadas al pensamiento matemático se juzgan mediante la teoría, axiomas matemáticos y la realización de procedimientos válidos. Respecto a lo anterior es necesario tomar en cuenta los procesos que utiliza el alumno para resolver un problema, además de identificar si el procedimiento que se lleva a cabo es el adecuado. También es de suma importancia tener en cuenta las dificultades y obstáculos que se le pueden presentar al alumno durante su aprendizaje para estar preparados y tratar de reducirlos.

1.1.1 Preguntas de investigación

¿Qué errores son más comunes a causa de una comprensión deficiente en las operaciones de números con signo, en alumnos de primer grado de secundaria?

¿De qué manera afecta la falta de comprensión en el aprendizaje de la adición y sustracción de números con signo?

1.1.2 Supuesto(s)

Ante esta problemática se puede suponer que:

- El alumno no ha comprendido cómo desarrollar correctamente las operaciones básicas como la suma y resta. Por ejemplo, se presentan casos donde el alumno realiza correctamente ejercicios o actividades en clase pero éste, no tiene seguridad sobre sus decisiones o procedimientos y termina acudiendo al docente, éste tipo de situaciones impiden que el alumno desarrolle su autonomía.

- No entiende como explica el profesor.
- La secuencia de los contenidos temáticos no tiene un orden adecuado.

1.2 Justificación

El propósito de esta investigación es identificar las grandes problemáticas que siguen existiendo dentro del aprendizaje de las matemáticas como los son las operaciones de números con signo, y qué factores influyen para que el alumno no desarrolle su conocimiento correctamente. Es importante llevar a cabo esta investigación para saber exactamente dónde ocurren los desconciertos del alumno, a su vez entender mejor cómo los alumnos piensan sobre las operaciones de números con signo para que el docente pueda darse cuenta que estrategias puede utilizar, además prevenir y de alguna manera intervenir en las dificultades que se le presenten. Con el fin de lograr un incremento en el aprovechamiento de los alumnos.

> Borjas (2009) menciona sobre la importancia del aprendizaje de este contenido:
> Todos los alumnos terminarán utilizando dichas operaciones en el futuro tanto si acceden a la universidad como si no, e incluso aunque no cursen el bachillerato. Por eso es esencialmente importante que este pilar de las matemáticas quede bien asentado, ya que es junto la expresión oral y escrita el 90% de los procedimientos con los que se va a manejar en la vida y que les permitirán acceder a otros conocimientos (p. 12).

Es decir, las operaciones de números con signo forman parte de nuestra vida diaria, ya que la mayoría de las veces se hace uso de ellas, por ejemplo: con el simple hecho de la ganancia o pérdida de dinero y eso se puede representar como cantidades o magnitudes positivas o negativas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Identificar las dificultades que se le presentan al alumno en la comprensión de operaciones de números con signo a través de la interacción docente-alumno.

1.3.2 Objetivos específicos

Describir algunos factores que dificultan el aprendizaje de las operaciones de números con signo.

- Se diseñarán estrategias de enseñanza sobre el tema de operaciones de números con signo.

1.4 Antecedentes

La enseñanza de los números enteros.

Lo que se aprende acerca de los números, tanto en los primeros años de primaria como cuando se cursa la educación secundaria, forma parte de un único conocimiento numérico, que debe tener un hilo conductor que lo unifique y lo haga homogéneo. Es necesario conectar los conjuntos numéricos, de forma que los alumnos no construyan un conocimiento de que cada conjunto de números es algo aislado de los demás.

El conocimiento numérico abarca diversos aspectos relativos a los números. Bruno (1997) menciona tres aspectos denominados dimensiones para trabajar con los alumnos:

1. En la dimensión abstracta se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y las formas de escritura de los números.
2. En la dimensión recta se ubica la representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma.
3. En la dimensión contextual se encuentran las utilidades y usos de los números.

El conocimiento numérico no se limita al conocimiento de las tres dimensiones mencionadas anteriormente, sino también abarca transferencias entre ellas, es decir la expresión en una dimensión de un conocimiento dado en otra. Gráficamente se puede representar esta última idea con el siguiente triángulo donde la flechas indican las transferencias de una dimensión a otra (Figura 1).

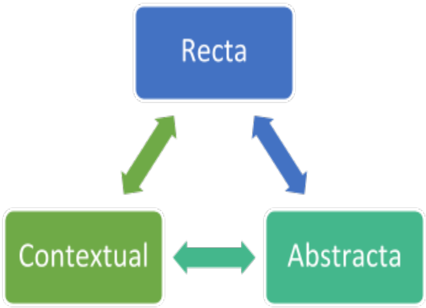
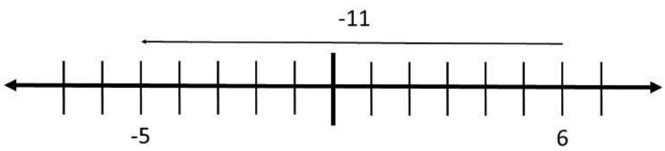
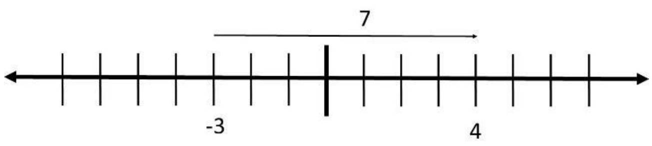


Figura 1. Transferencia entre las dimensiones (Bruno, 1997)

Veamos en la siguiente tabla ejemplos de actividades para cada una de las transferencias.

Tabla 1. Actividades sobre cada una de las transferencias (Bruno, 1997)

Transferencia abstracto → recta Representa en la recta la operación: -4+10=6	**Transferencia recta → abstracto** Dime una operación que pueda ser representada en la recta de la siguiente forma 
Transferencia abstracto → contextual Dime una situación que pueda ser resuelta con la siguiente operación: -4+7=3	**Transferencia contextual → abstracto** Dime una operación que pueda resolver la siguiente situación: *La temperatura en Madrid es de 9 grados sobre cero. En París hay 12 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?*
Transferencia contextual → recta Representa la siguiente situación en la recta	**Transferencia recta → contextual** Dime una situación que pueda ser representada de la siguiente forma:

Un ascensor estaba en el piso 5 del sótano y subió 7 pisos. ¿Cuál era la posición del ascensor después de esta subida?	

El inicio de aprendizaje numérico se produce en el sistema de los números enteros no negativos y concluye con el de los números reales (no préstamos atención a los números complejos). Varios son los caminos posibles a recorrer; es decir varias de las secuencias de extensiones que podrían realizarse tal y como se observa en el siguiente esquema.

$$\begin{tikzcd} Z_+ \arrow[r] \arrow[d] & Q_+ \arrow[r] \arrow[d] & R_+ \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Q \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

El estudio de una ampliación debe situarse en una de las secuencias posibles, para tener presente lo ya conocido y lo que aún queda por aprender. Parece adecuado realizar secuencias de extensiones que avancen hacia los números reales como:

$$Z+ \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow R$$

$$Z+ \rightarrow Q+ \rightarrow Q \rightarrow R$$

$$Z+ \rightarrow Q+ \rightarrow R+ \rightarrow R$$

En cada ampliación numérica deben de considerarse las tres dimensiones en particular, debe utilizarse, entre otros, un significado común a todas las clases de números y eso se logra con la medida de magnitudes reales relativas (Bruno, 1997).

Para la identificación de la suma y resta Bruno (1997) menciona que es necesario realizar ejercicios donde se utilicen números opuestos es decir a + (-a) = 0. Dentro de la dimensión contextual las ideas de suma y resta se identifican mediante significados contrarios: sumar es añadir, unir,... mientras que en restas es quitar, separar… Dentro de la investigación de Bruno se comprobó que para los alumnos es complejo identifiquen las dos operaciones en la dimensión contextual, en cambio en la dimensión abstracta no se les presenta tanta dificultad. Entre los pocos alumnos que obtenían resultados correctos tenían un grado mayor de compresión en la identificación de las dos operaciones, la causa de que los demás alumnos no lograran los resultados correctos es porque predominan las ideas de las operaciones como algo opuesto.

Bruno (1997) en su investigación ¨La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación¨ afirma que dentro de la enseñanza de operaciones de números con signo debe de existir transferencia entre tres dimensiones: abstracta, contextual y recta. Dentro del proceso de enseñanza es necesario observar las transferencias que predominan en los alumnos para así apoyarlos con las que se les dificulta más. Dentro de la investigación también se encontró una asimetría en las transferencias entre las dimensiones contextual y abstracta: para los alumnos resultó más difícil pasar de lo abstracto a lo contextual que de lo contextual a lo abstracto.

Por otra parte resultó más fácil llegar a la representación en la recta desde lo contextual que desde lo abstracto, y les resultó más fácil llegar a lo contextual desde la recta que desde lo abstracto. A la mayoría de ellos les resultó más fácil llegar a lo abstracto desde lo contextual que desde la recta. Esto quiere decir que para los alumnos es más clara la representación de situaciones concretas en la recta que pasar por un lenguaje abstracto esas situaciones. Estos resultados se resumen en la siguiente figura, donde se señalan las transferencias que resultaron más fáciles para los alumnos.

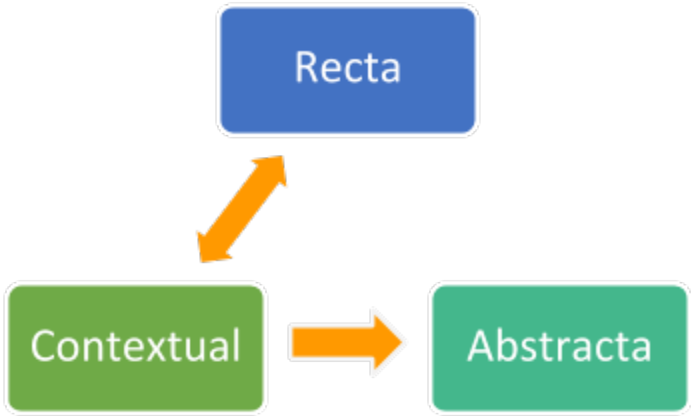


Figura 2. Transferencias que establecen los alumnos con más facilidad (Bruno, 1997)

La enseñanza de los números negativos.

La forma habitual de introducir al alumno en los números negativos es distinguir entre los números naturales y los números enteros, definidos como los números naturales con un signo (positivo o negativo).

Cid (2003) menciona la intención de buscar los obstáculos que dificultan la comprensión y aprendizaje de números negativos. Para ello busca los obstáculos que se han presentado en el pasado, analizando distintas épocas. Glaeser considera que en la evolución histórica sobre la noción del número negativo desde sus inicios hasta la actualidad, se pueden constatar los siguientes obstáculos o dificultades:

a) Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas: esto se refiere al hecho, observable en la obra de Diofanto, sobre la necesidad de efectuar cálculos algebraicos de sustracción y en particular, la necesidad de multiplicar dos números negativos, sin embargo no se acepta la existencia de los números negativos aislados.
b) Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas: en las obras de algunos matemáticos (Stevin D' Ambert, Carnot y Descartes) se hace notar sobre la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las

"ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden adaptarlas como cantidades reales y se justifican diciendo que son cantidades imaginarias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

c) Dificultad para unificar la recta real: En el intento de superar el obstáculo anterior de interpretar los números negativos como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Amlembert, Carnot y Cauchy) pensaban sobre los números negativos y los positivos como términos antinómicos[1]: donde lo negativo neutraliza, se opone a lo positivo, pero era de condición diferente. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva pero tomada en un sentido opuesto. Esta variedad que se establece entre positivos y negativos no facilitaba su unificación en una única recta numérica pero favorecía al modelo de dos semirectas opuestas funcionando separadamente.

d) La ambigüedad de los dos ceros: Glaeser se refiere a esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significa la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero seleccionado arbitrariamente. Anteriormente se oponían a la consideración de cantidades negativas como cantidades reales y no como bases de la matemática, lo que se decía es que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada".

Estado del arte

Hoy en día el papel de las matemáticas juega un papel importante en la vida diaria, Rodríguez (2011) menciona que es importante trabajar en que las operaciones tengan un significado, para esto se propone que el alumno resuelva problemas cotidianos que le ayuden a construir el concepto de cada operación matemática. El trabajar con los diferentes significados y las distintas representaciones da la

[1] Contradicción entre dos principios racionales. El Diccionario de la lengua española (DRAE) (2001) 22.ª Edición. Recuperado en: http://lema.rae.es/drae/?val=antinomico

posibilidad de identificar las diferentes relaciones que existen entre las operaciones así como también las propiedades de cada una de ellas.

Hablar de sentido y significado son dos puntos distintos, el primero se logra después de un recorrido por los diferentes aspectos, es una construcción que se hace a largo plazo, personal del alumno. El segundo se refiere a los significados de las operaciones, que se ponen en juego en las diferentes situaciones donde los datos se relacionan de distinta forma según cada caso y este aspecto debe ser considerado por el docente.

En el estudio realizado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006) acerca de errores y las dificultades en la matemática mencionan que uno de los errores más frecuentes deviene de la recuperación de esquemas previos, como la multiplicación con signos diferentes cuando se trataba de sumas y/o restas de números enteros y no de productos. En donde la recuperación de esquemas previos se refiere a los errores causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se han modificado. En estas instancias, el alumno no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido.

Indican Carpenter y Moser (1982) que es una creencia falsa el que los problemas aditivos son difíciles para los niños de todas las edades, y que se deben practicar las operaciones de suma y resta antes de poder resolver problemas verbales simples. En sus estudios encontraron que los niños pueden resolver de manera eficiente problemas aditivos antes de recibir instrucción formal sobre ellos. Esto indica que los problemas pueden dar significado a las operaciones de suma y resta, y son una alternativa para introducirlas.

2. Marco teórico:

2.1 ¿Qué es una dificultad?

Hoy en día las dificultades suelen ser una gran barrera que impiden el aprendizaje del alumnado que se presentan a causa de diversos problemas como se menciona a continuación:

> Dificultades en el Aprendizaje es un término general que se refiere a un grupo de problemas agrupados bajo las denominaciones de: Problemas Escolares (PE), Bajo Rendimiento Escolar (BRE), Dificultades Específicas de Aprendizaje (DEA), Trastorno por Déficit de Atención con o sin Hiperactividad (TDAH) y Discapacidad Intelectual Límite (DIL) (Romero y Lavigne, 2004)(p.11).

Segun Romero y Lavigne (2004) las dificultades en el aprendizaje se dividen en función de los siguientes tres criterios:

- Gravedad (G): Considerada desde la perspectiva de la persona que presenta la dificultad, no se trata, por tanto, de una consideración estadística, ni de coste social. Aquí la calificación de grave implica importancia del problema, ausencia de posibilidad de remisión espontánea, necesidad de intervención externa especializada.
- Afectación (A): Indica el carácter predominante del problema dadas las áreas personales (procesos, funciones, conductas) afectadas. Estrechamente vinculada a la gravedad.
- Cronicidad (C): Se refiere al tiempo de duración del problema e indica las posibilidades de recuperación espontánea o mediante intervención especializada desde diferentes perspectivas: psicopedagógico, psicoterapéutica, médica, psicosocial.

De acuerdo con ello se distinguen cinco tipos o grupos que irán de menor a mayor gravedad, de menor a mayor afectación y de mayor a menor cronicidad:

 Tipo I (no G, no A, no C), en el que se incluirían los alumnos con <u>problemas escolares</u> debidos a factores externos al alumno, que les afectan de modo coyuntural y que remiten de forma espontánea (sólo por la mediación educativa regular) o bien mediante acción tutorial. Se trata, por tanto, de problemas considerados como leves, que no afectan de forma dominante al alumno y de carácter reversible.

- Tipo II (moderada G, moderada A, no C), se trata de alumnos que presentan bajo rendimiento escolar. Las causas son, en primera instancia, externas al alumno, si bien frecuentemente suelen combinarse con características personales que incrementan su importancia. Son problemas de moderadas gravedad y afectación personal (procesos psicolingüísticos, motivación, metacognición), aunque recuperables, si se dan las necesarias atenciones educativas escolares y familiares.
- Tipo III (moderada-alta G, moderada-alta A, moderada-baja C), se incluyen aquí a los alumnos con dificultades específicas de aprendizaje, cuya causa originaria es independiente de las condiciones ambientales, pero su desarrollo y el grado de importancia que adquieren, si están estrechamente vinculados a factores educativos. Las dificultades específicas de aprendizaje son de gravedad moderadamente alta, en la medida en que no remiten de forma espontánea (sólo por mediación educativa regular), y que requieren atenciones educativas especiales prolongadas; la afectación es también moderadamente alta, ya que no son dominantes las áreas personales afectadas; y son recuperables mediante programas de intervención temprana adecuados y adaptaciones curriculares individualizadas y específicas.
- Tipo IV (G, A, moderada C), en este grupo se encuentran los alumnos con trastornos por déficit de atención con hiperactividad. Éste es un trastorno que se debe a factores personales de carácter grave que frecuentemente se combinan con respuestas inadecuadas del entorno (provocadas por las características de los problemas que se presenta y la incomprensión e incapacidad de quienes rodean a la persona que padece el síndrome), cuando esto ocurre la gravedad del trastorno se incrementa severamente. Las áreas personales afectadas son varias e importantes, no obstante, con el adecuado tratamiento médico-farmacológico y psicoeducativo la cronicidad del problema disminuye significativamente.
- Tipo V (G, A, C), aquí se encuentran los alumnos con discapacidad intelectual limite, debida a causas personales graves, que afectan a áreas dominantes de modo profundo y que tienen un carácter crónico, es decir, que mediante la estimulación

ambiental se consiguen notables avances pero difícilmente la remisión total del problema.

2.1.1 La compresión desde una perspectiva matemática

En la actualidad los investigadores de la comunidad de la educación matemática no han alcanzado un acuerdo concreto sobre el concepto de comprensión pero varios autores se acercan a él desde distintos puntos de vista, entre ellos están los modelos constructivistas de Pierre y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y de la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) de Dubinsky, estos incluyen el tema representaciones múltiples de Kaput.

De acuerdo con Kaput (1989), la energía cognitiva existe en representaciones múltiples y vinculadas. Estas proporcionan una redundancia mientras permiten al estudiante suprimir algunos aspectos de ideas complejas y enfatizar otras. La facilidad de estas representaciones y sus vínculos permiten al estudiante comprender las ideas complejas de maneras nuevas y aplicarlas en forma efectiva. En general un sistema de representación (o un sistema simbólico) coopera con la instalación de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput 1989). Este sistema de representación consta con dos aspectos representativos, el representando y el representante; en el primero se refiere a los elementos del mundo representado siendo representados; en el segundo se refiere a los elementos del mundo representante realizando la representación.

Meel (2003) menciona que las representaciones matemáticas o sistemáticas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolo que contiene correspondencias especiales. Los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos.

Cuando el estudiante construye un significado personal, se presenta una negociación entre dos mundos separados: las operaciones físicas que pueden observarse y las operaciones mentales que son hipotéticas (Meel 2003). En particular el desarrollo de la compresión es el cambio de operación en el mundo de las operaciones físicas para operar en el mundo de las operaciones mentales.

Pirie y Kieren en su modelo sobre la compresión mencionan que su concepto sobre la compresión evolucionó después de la definición constructivista de Glaserfeld. Este autor propuso la siguiente definición de compresión:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar compresión. (Glaserfeld, 1987)

Glaserfeld percibió la comprensión como un procesos continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona. Al utilizar esta definición como un organizador avanzado, Pirie y Kieren desarrollaron su punto de vista teoría respecto a la comprensión matemática. Ellos describieron la comprensión matemática de la siguiente manera:

> La comprensión matemática se puede definir como establecer pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel en particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (Pirie y Kieren, 1989)

De acuerdo con la definición anterior, Pirie y Kieren conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática en diferentes niveles. El primer nivel es el conocimiento primitivo el cual se refiere al punto inicial; no a un bajo nivel de nivel de matemáticas, el contenido central es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje. El segundo nivel se refiere a la creación de imagen, donde el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores, estas imágenes no son necesariamente ¨representaciones pictóricas¨, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.

En el siguiente estrato llamado compresión de la imagen, las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental, el desarrollo de estas imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas (Meel, 2003). El cuarto nivel se conoce como observación de la propiedad, aquí el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen, además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre distintas imágenes mentales.

Como quinto nivel de comprensión, está la formalización, el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de clases de imágenes, aquí es donde el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Meel, 2003). Como siguiente nivel esta la observación, permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona, más allá de la relación del estudiante en la meta cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos del pensamiento personales, así como reconocer las ramificaciones de los procesos del pensamiento. Una vez que el alumno puede organizar sus observaciones y después de que logró conciencia de lo que aprende puede pasar al séptimo y último nivel, el cual es la estructuración; en esta etapa el estudiante comienza a observar la relación entre distintos sujetos; realiza ciertas preguntas sobre ideas subyacentes, axiomas y ejemplos; relaciona sus ideas a través de varios dominios y percibe la interconexión de diversas teorías.

Otra de las teorías de la comprensión matemática es la de Dubinsky también llamada Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE). Como menciona Meel (2003) en esta teoría, el desarrollo de la compresión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas. Esta teoría se centra en la construcción de esquemas y la abstracción reflexiva debido a que separa las propiedades conectadas e identifica los elementos salientes que comprenden el concepto en forma separada del contexto.

De acuerdo con Dubinsky (1991), existen cinco distintos tipos de construcciones de Piaget son esenciales para desarrollar conceptos matemáticos abstractos: generalización, interiorización, encapsulamiento, coordinación y reversión. La última construcción, reversión, que se considera como un elemento crucial para el pensamiento matemático avanzado desde la perspectiva APOE, no fue parte de la descripción de Piaget sobre la abstracción reflexiva, a pesar de que estaba contenida en sus escritos.

La teoría de APOE cuenta con ciertos elementos y de los cuales Dubinsky propone un esquema que es más como una entidad estática, debido a que continúa siendo inseparable de su propia evolución continua y dinámica. La figura 3 muestra la estructura de un esquema e identifica las construcciones que influyen.

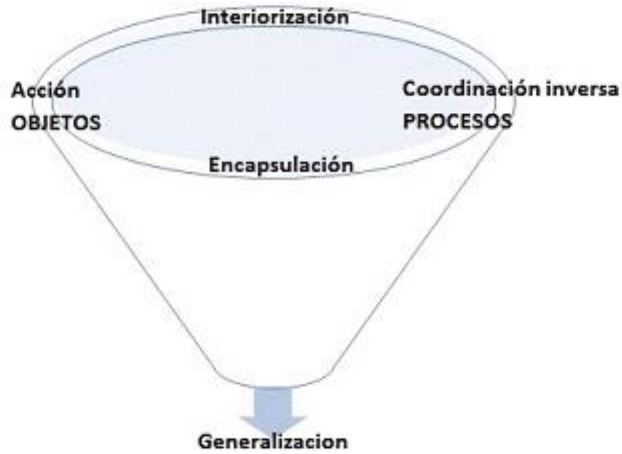


Figura 3. Esquemas y su construcción

Asiala (1996) identifica que la comprensión de un concepto matemático se origina mediante la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones. Una acción se equipara con cualquier operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Conforme una acción se interioriza a través de la secuencia de repetición de la acción de repetición de la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada proceso. El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e incluso revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo (Asiala, 1996).

En particular, el estudiante puede utilizar este proceso para obtener nuevos procesos, ya sea mediante la coordinación o la reversión. La coordinación de los procesos múltiples relacionados da como resultado la construcción de nuevos procesos. La reversión, es esencialmente, la construcción de un proceso que es una contraorden de un proceso internalizado (Meel, 2003) . Por ejemplo, un estudiante puede vincular dos o más procesos juntos para producir una función compuesta que coordine diversos procesos en un proceso singular o que revierta una función para obtener lo inverso de la función. Además, el fortalecimiento de una concepción de proceso permite un mayor acceso del estudiante a las nociones como las de uno a uno y otras.

Cuando el alumno puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera encapsulado para convertirse en objeto. Una vez encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky, 1994). El siguiente paso en la comprensión matemática es el desencapsulamiento, el cual permite al estudiante utilizar las propiedades inherentes al objeto para realizar nuevas manipulaciones a partir de él.

El elemento final de la teoría APOE, es el esquema, es una colección de procesos y objetos, esta colección puede ser más o menos coherente, pero el estudiante utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o concepto observados. En particular estos esquemas son representaciones mentales de los conceptos, dado que existen en la mente del estudiante. Como resultado, Dubinky (1994) señala que "un esquema puede utilizarse para resolver una situación problemática desempacándolo y trabajando con los procesos y objetos del individuo. Un esquema también puede tratarse como un objeto en el sentido de que se pueden aplicar en acciones y procesos".

2.1.2 Sentido y significado de las operaciones básicas.

De acuerdo con Rodríguez (2011) hablar de sentido y significado es referirse a dos condiciones distintas, el primero se logra después de un recorrido por diversos aspectos, es una construcción que se hace a largo plazo y es personal del alumno. El segundo se refiere a los significados de las operaciones, que están en juego en las diferentes situaciones en donde los datos se relacionan de distinta forma según cada caso, aspecto que debe considerar el docente. Es decir, es necesario que el alumno primero domine las operaciones básicas para poder encontrar un significado y aplicarlo a una situación donde sea válido el proceso matemático y que el docente trabaje en desarrollar el significado de cada operación básica ya que ayuda a la construcción de las operaciones.

Rodríguez y Palumbo (2005; p. 4) plantean: "El trabajar los diferentes significados y las distintas representaciones da la posibilidad de identificar las múltiples relaciones que existen entre las operaciones así como también las propiedades de las mismas". Por lo que la construcción del concepto de las operaciones requerirá proponer al alumno diferentes situaciones que se resuelvan con la misma operación (misma operación – diferente significado) así como otras donde se ponga en cuestionamiento el mismo significado con variaciones en el lugar de la incógnita, habilitando así la utilización de diferentes operaciones.

¿Por qué es importante que el alumno reconozca el significado del uso de operaciones básicas? Como señala Vergnaud (1991) "el conocimiento consiste en establecer relaciones", si el alumno no comprende la relación que tiene el uso de contenidos matemáticos en la vida diaria no podrá ser autónomo en la resolución de situaciones cotidianas por eso es substancial que el docente ayude a desarrollar esta capacidad del estudiante.

2.2 Los números con signo en primer grado de secundaria.

En el ciclo escolar 2005-2006 dio inicio la aplicación de la Reforma de Educación Secundaria en 30 entidades federativas, llamada Primera Etapa de Implementación (PEI) de nuevo currículo. En el año 2006 se da inicio a nivel nacional con la aplicación del nuevo currículo por competencias. De acuerdo a la reforma de la enseñanza en el Programa de Matemáticas de 2011, éste se organiza en tres ejes fundamentales: Sentido numérico, pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida y Manejo de la información. A diferencia del Plan y Programas de 1993 los contenidos en matemáticos se organizaban a lo largo de todo el ciclo escolar donde se combinaban a la par cinco áreas de las Matemáticas, lo que impedía el alcance de los objetivos en forma escalonada, para poder desarrollar con mayor oportunidad el pensamiento lógico matemático en los alumnos.

Como señala el Programa de Estudios SEP (2011) *Sentido numérico y pensamiento algebraico* menciona los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del algebra. En el eje de Forma, espacio y medida se enfoca en los aspectos esenciales de la geometría y la medición. *Manejo de la información* puede provenir de situaciones deterministas, definidas o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular.

Lo anterior manifiesta la importancia de la Reforma Educativa de Secundaria que tiene como propósito fundamental el desarrollo de competencias por parte del estudiante y el trabajo colaborativo a través de proyectos, es decir el desarrollo de competencias para la vida.

En lo que compete a esta investigación, interesa encontrar los mejores fundamentos que permitan diseñar las oportunidades más adecuadas para el aprendizaje del tema Operaciones de números con signo en nivel secundaria, pero es necesario partir de los números enteros. La enseñanza de los números enteros es elemental para la comprensión de temas más complejos, por lo que es muy notoria la exigencia que se deriva para su enseñanza, ya sea en la resolución de problemas o en las comprensión de alguna situación como por ejemplo, la temperatura de una población, las pérdidas o ganancias que tiene una persona, entre otras.

En primer grado de secundaria al alumno se le explica en qué consisten los números enteros. A todos estos números, los negativos, el cero y los positivos se les llaman números enteros y se representan por la letra Z:

$Z = \{...,−5,−4,−3,−2,−1,0,+1,+2,+3,+4,+5,.\}$

Entre los números enteros existen los positivos y negativos y se identifican anteponiendo un signo + para el positivo y un signo de – en el número natural.

En la educación básica los contenidos van aumentando de dificultad de manera gradual, esto conlleva a que los alumnos de primer grado de secundaria comprendan los números con signo, lo cual causa dificultad en su enseñanza y aprendizaje, por eso es necesario establecer actividades que permitan al docente enseñar contenidos de manera gradual, a través de proyectos o actividades diferenciadas con la finalidad de que el alumno los comprenda adecuadamente y los aplique en el aprendizaje de temas más complejos que son derivados de este. En relación a lo anterior el Libro para el Maestro de Educación Secundaria (2011), menciona: "Se sugiere acercarse gradualmente al estudio de números con signo, dando tiempo a que los alumnos maduren sus ideas y comprendan la necesidad de operar con ellos en diversas situaciones, sobre todo el manejar expresiones algebraicas"

El tema de números con signo inicia en el primer grado de Educación Secundaria en el cuarto bloque, con la introducción de la ubicación de dichos números en la recta numérica y la resolución de problemas que impliquen su utilización y en el quinto bloque se estudia la adición y sustracción de números con signo, estos bloque si se desarrollan de manera coherente y propician un mejor aprendizaje en este aspecto.

2.2.1 Pensamiento numérico.

Para poder comprender cómo es que el alumno construye su conocimiento en las operaciones de números con signo, es necesario empezar por entender cómo es que este construye su conocimiento y cómo percibe los contenidos relacionados con números, pero también es necesario incluir lo que investiga el pensamiento numérico en didáctica de la matemática. El hablar de pensamiento numérico es hacer referencia a: "la línea de estudio que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social" (Marí, 2010), de este modo la línea del pensamiento numérico investiga los campos conceptuales numéricos, considerando los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares que están involucrados en la aplicación de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos a un conjunto de realidades y problemas que necesitan ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de nuestra estructura numérica.

Como menciona Marí (2010), el pensamiento numérico hace especial énfasis en los aspectos cognitivos del alumno y sus principales objetivos de investigación son:

a. La organización conceptual de sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura numérica;
b. La elaboración y construcción mental de los sistemas simbólicos mencionados, así como la organización y sistematización de diferentes competencias cognitivas basadas en las estructuras numéricas;
c. Los modos de abordar e interpretar, y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

De los puntos anteriores el objetivo que más se asemeja a nuestra problemática es el tercero, ya que menciona la interpretación del alumno de cuestionamientos y los procedimientos que utiliza para resolver un ejercicio y ese fue un aspecto que se presentó en ambas instituciones educativas.

Ahora bien ya se sabe lo que estudia el pensamiento numérico en general, pero con el enfoque hacia el alumno ¿Qué es el pensamiento numérico? Cruz (2007) nos dice que es la presentación de conceptos, relaciones y procedimientos de la matemática e intentos de apropiación de técnicas para resolver problemas previamente estructurados. Esto quiere decir que el sujeto usa los conocimientos que ha aprendido en matemáticas para después darle un sentido y resolver problemas con técnicas que sean apropiadas para encontrar la solución.

3. Metodología:

3.1 Resolución de problemas aditivos con números positivos y negativos.

Hoy en día la resolución de problemas tiene un papel muy importante, ya que la actividad de resolver problemas es esencial cuando se desea adquirir un aprendizaje significativo de las matemáticas. Por ejemplo en la vida diaria se presentan situaciones en donde se utilizan los números positivos y negativos, como puede ser en el momento de ir a la tienda y pagar algo o cuando debemos algún dinero, cuando deseamos expresar una temperatura es ahí donde se presentan estos números positivos y negativos; es por eso que la resolución de problemas es de suma importancia y juega un papel esencial en el aprendizaje de los alumnos, para que de esta manera los alumnos estén preparados ante cualquier situación de la vida real.

> No se debe pensar en la actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que enseñanza y aprendizaje de las matemáticas permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Al resolver un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad (Godino, 2004; pp. 66-67).

Como menciona Godino (2004; p. 67) el trabajo del alumno en la clase de matemáticas debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos:

- El alumno investiga y trata de resolver problemas, predice su solución (formula conjeturas).
- Trata de probar que su solución es correcta.
- Construye modelos matemáticos.
- Usa el lenguaje y conceptos matemáticos, incluso podría crear sus propias teorías,
- Intercambia sus ideas con otros.
- Finalmente reconoce cuáles de estas ideas son correctas- conformes con la cultura matemática-, y entre todas ellas elige las que le sean útiles.

3.1.1 Dificultades en la resolución de problemas que involucren operaciones de números con signo.

En la actualidad las dificultades en las operaciones de números con signo suelen ser un obstáculo para el alumno, de manera que dejan que comprendan claramente ese conocimiento. En algunas ocasiones estas dificultades se deben a la mala redacción de los problemas, por la presentación de los problemas, por el orden en el que se presentan los enunciados o simplemente en la posición en donde la incógnita que se pretende resolver.

Como menciona Bruno (1999), algunos de los factores que influyen en el proceso de sumar y restar son:

- La forma de redactar los problemas.

  En los primeros niveles educativos, el lenguaje y la estructura lingüística tienen una gran importancia en la fase de comprensión del enunciado del problema. En ocasiones los alumnos hacen una traducción lineal del enunciado y se apoyan en las "palabras clave" que aparecen (más, menos, añadir, quitar, etc.) y en función del sentido de esas palabras, resuelven el problema con una suma o una resta. Por ejemplo algunos problemas suelen ser los siguientes:

  Ejemplo 1

  Miguel tenía 3 caramelos, compró algunos más y ahora tiene 7, ¿cuántos compró?

  3 + 7 = 10

  Ejemplo 2

  Miguel tenía 8 caramelos, se comió algunos y ahora tiene 3, ¿cuántos se comió?

  8 - 3 = 5

  En el ejemplo 1 las palabras claves "compró" y "más" pueden llevar al niño a escribir una suma, cometiendo en este caso un error. Mientras que en el ejemplo 2, la palabra "comió" induce a efectuar una resta y por consiguiente, a una respuesta correcta.

Influyen también en la dificultad de los problemas el uso de términos desconocidos, el tiempo de los verbos, el abuso de los adverbios, la extensión del enunciado.

- Los formatos de presentación.

  Los formatos de presentación que lleven a una mejor explicación de las situaciones dadas en el problema pueden facilitar el éxito en la resolución, por ejemplo el ilustrar los problemas con imágenes clara que den sentido al problema o al enunciado.

- Orden de las proposiciones en el enunciado.

  El orden en que aparecen las proposiciones en el enunciado condiciona la dificultad del mismo. Por ejemplo en el siguiente enunciado, a pesar de ser el mismo problema, la primera redacción resulta más sencilla para los alumnos que la segunda, debido a que en la primera la redacción se respeta la secuencia temporal de los sucesos.

  Ejemplo

  Tengo 67 pesos, me gasto 33, ¿cuántas me quedan?

Me he gastado 33 pesos de las 67 que tenía, ¿cuántas me quedan?

De esta manera en el primer enunciado se sabe que los 67 pesos que tiene son los positivos (+67) y los 33 pesos que se gastó son los negativos (-33), por lo que se tiene que efectuar la siguiente resta (+67-33 = 34), de lo contrario en el segundo enunciado tiende a confundir al alumno ya que la cantidad que se encuentra al inicio del enunciado son los 33 pesos gastados (-33) y a continuación los 67 pesos que tenía (+67), por lo que se tendría que efectuar la misma operación pero con las cantidades invertidas(-33 +67= 34), es ahí donde ocurre la confusión en el alumno.

- La posición de la incógnita.

  El dato desconocido o incógnita condiciona de manera determinante la dificultad de los problemas de sumar y restar. De manera general, en la siguiente tabla cada columna implica un grado mayor de dificultad.

Tabla 2. Posiciones a encontrar de la incógnita

Más fácil Más difícil		
I3	I2	I1
a + b = ¿?	a + ¿? = c	¿? + b = c
a - b = ¿?	a - ¿? = c	¿? – b = c

3.1.2 Errores más comunes en la resolución de problemas con números con signo.

Antes de mencionar los errores más comunes se explicará el concepto de error. “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, 2004; p. 73).

Brousseau, David y Werner (1995; pp. 34-35) señalan cuatro vías mediante las cuales el error puede presentarse, las que enuncian del siguiente modo:

- Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.

- Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
- También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
- Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

Entre otros errores comunes en la resolución de problemas Abrate R. y otros (2006; pp. 53-55) categorizan los siguientes errores:

- Errores debidos a la recuperación de un esquema previo.

Son causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se han modificado. En estas instancias, el alumno no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido.

Ejemplifican este tipo de error las siguientes situaciones:

Situación	**Respuesta frecuente**	**Descripción del procedimiento empleado**
– 13 + 20	–7	Se recupera el esquema: – * + = – de la multiplicación cuando el contexto se ha modificado.
– 5 – 8	13	Se recupera el esquema: – * – = + de la multiplicación cuando el contexto se ha modificado.

- <u>Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales.</u>

Son errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación. En estas circunstancias si el alumno llevará a cabo un análisis retrospectivo advertiría la presencia del error.

Tabla 3. Errores al efectuar cálculos incorrectos o accidentales

Situación	**Respuesta frecuente**	**Descripción del procedimiento empleado**
$\frac{2}{5} + 3 + \frac{4}{5}$	$\frac{1 + 15 + 4}{5} = \frac{20}{5} = 4$	El error técnico o de cálculo se presenta cuando en situaciones semejantes no es cometido por el estudiante, o, ante la reflexión de los pasos seguidos, es advertido por el mismo.