Caracterización de la comprensión de conceptos económicos a través de la relación función-derivada: una aproximación desde la métrica FUZZY

Angel Luis Ariza Jiménez. Universidad de Alicante.
angelariza@ua.es

1. Objetivos o propósitos:

La comprensión de las relaciones entre la función y su función derivada está en el trasfondo de muchos conceptos económicos y es fundamental para entender el análisis marginal en el que se basa la disciplina económica en general y microeconómica en particular. Las investigaciones que analizan la relación de los conceptos matemáticos y económicos desde la óptica de los profesores (García, Azcarate & Moreno, 2006), desde los resultados de los propios alumnos, y desde la estructuración de los libros de texto (Akihito, 2006), indican que algunas veces los conceptos económicos se manejan sin una buena comprensión de los significados matemáticos que los organizan. El hecho de que algunos conceptos de microeconomía estén modelizados por la relación entre una función y su derivada pone de manifiesto la necesidad de centrar la atención en estos aspectos. En particular, el concepto matemático de función derivada aparece de forma habitual y frecuente en el tratamiento de conceptos económicos, especialmente en aquellos pertenecientes al campo de la Microeconomía.

Por otra parte, los estudios que analizan la importancia de los registros de representación en el aprendizaje de conceptos económicos, proponen información controvertida en el sentido de que la utilización del registro gráfico es esencial para aprender Microeconomía (Hey, 2005) o planteando sus limitaciones (Cohn, 2001). Sin embargo, existen argumentos para pensar que el registro gráfico es importante en el aprendizaje de la economía como lo es en el de las matemáticas (Boyd, 1998).

El objetivo de este trabajo es caracterizar la comprensión de la relación entre una función económica y su derivada por parte de alumnos universitarios, y a partir de la misma establecer pautas para avanzar a un nivel de desarrollo de la comprensión de los conceptos económicos más avanzado.

2. Marco teórico:

Un esquema se desarrolla a través de tres niveles: INTRA, INTER y TRANS (Piaget & García, 1983/1989). El nivel INTRA se caracteriza por la realización de acciones considerando de manera aislada los elementos matemáticos, sin coordinación o

aparición de relaciones lógicas entre los mismos, y siempre dentro de un mismo registro de representación. Por ejemplo, cálculo formal de la expresión de la derivada de una función en el registro algebraico. En el nivel INTER se establecen relaciones lógicas entre los distintos elementos generalmente en un registro de representación. Por ejemplo, la obtención de la representación gráfica de la derivada a partir de la representación gráfica de la función. Mientras que en el nivel TRANS esas relaciones se realizan sin restricciones y estableciendo la síntesis (obtención de la derivada en ambos registros).
El mecanismo por el cual el individuo se traslada de un nivel a otro es denominado "abstracción reflexiva" (Piaget & García, 1983/1989). Esta abstracción reflexiva ha de entenderse en un doble sentido: la proyección de la existencia de conocimiento dentro de un nivel de pensamiento superior, esto es, trascender y construir una nueva y más compleja estructura de conocimiento, y la reorganización y combinación de elementos estructurales para conseguir un objetivo dado (organización estructural). En relación a la proyección, el modo en el que la organización estructural de acciones, procesos y objetos es llevado a cabo a través de un cambio en los usos, o una aplicación implícita para un objetivo determinado, y a conceptualizar es lo que se denomina tematización. La transición desde un uso implícito a un uso consciente de los elementos matemáticos y el establecimiento de algún tipo de relación entre ellos es lo que se ha llamado una proyección del conocimiento a un nivel de pensamiento superior por abstracción reflexiva, esto es, el proceso por el cual una estructura más compleja de conocimiento es construida. La reorganización del conocimiento es vista por estos autores como la posibilidad de que un esquema pueda ser tematizado para convertirse en otro objeto cognitivo a los que acciones y procesos les puedan ser aplicados.

3. Metodología:

Los instrumentos de recogida de datos fueron un cuestionario formado por 5 tareas con un total de 12 ítems relacionados conceptos económicos en los que la derivada aparece implícita o explícitamente y 25 entrevistas clínicas semiestructuradas. La tabla 1 muestra sobre qué conceptos económicos versaban las tareas y la equivalencia existente entre ellos en cuanto a la relación función-derivada:

Función	Función derivada
Función de Demanda	Elasticidad-precio de la Demanda
Función de Producción	Función de Producto Marginal
Función Coste Total	Función Coste Marginal
Función de Utilidad	Relación Marginal de Sustitución

Tabla 1: Conceptos económicos utilizados y significado matemático de cada uno

Para obtener la puntuación de cada estudiante a cada una de las tareas hemos usado la noción de espacio métrico fuzzy (George & Veeramani, 1994), considerando la métrica fuzzy estándar inducida por la métrica euclídea, d, sobre el conjunto X, que viene dada por la fórmula

$$F_d : (x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

La puntuación hace referencia al grado de adquisición del elemento correspondiente La métrica o distancia fuzzy, Fd, puede interpretarse como una valoración de la distancia euclídea, d(x,y), en términos cualitativos. Si d(x,y)=0, entonces se tiene que Fd = 1, lo que se interpreta como "cercanía extrema". A medida que d(x,y) se hace grande, Fd se va acercando a cero, es decir, se tiende a la "extrema lejanía", valor que se alcanza en el límite cuando d(x,y) tiende a + ∞, sea cual sea el valor de t>0. A continuación, determinamos dos valores fuzzy que nos indiquen la medida frontera entre INTRA-INTER y entre INTER-TRANS. Para determinar los puntos frontera INTRA-INTER e INTER-TRANS elegimos un estudiante, para cada caso, y conjeturaremos sus puntuaciones al cuestionario a partir de lo que se supone seria capaz de hacer en el nivel superior, transcendiendo así el inferior. Así lo muestran las tabla 2:

Distancia Euclídea d(Q, I)	Medida Fuzzy $F_d : (Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3 + d(Q, I)}$
do(Q,I)=[(1-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2]½ =0	$F_{d^0}(Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3} = 1$
d1(Q,I) = [(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0,5)^2 + (1-0,5)^2 +(1-0,5)^2]½ = $\sqrt{0,75}$	$F_{d^1}(Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3 + \sqrt{0,75}} = 0,435$
d2(Q,I)=[(1-0,435)^2+(1-0,25)^2+(1-0,25)^2+(1-0)^2+(1-0)^2]½ = $\sqrt{3,201}$	$F_{d^2}(Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3 + \sqrt{3,201}} = 0,27$
Distancia Euclídea d(Q, I)	Medida Fuzzy $\mathbf{F_d (Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3 + d(Q, I)}}$
do(Q,I)=[(1-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2]½ =0	$F_{d^0}(Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3} = 1$
d1(Q,I) = [(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0,5)^2 + (1-0,5)^2 +(1-0,5)^2]½ = $\sqrt{0,75}$	$F_{d^1}(Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3 + \sqrt{0,75}} = 0,435$
d2(Q,I)=[(1-0,435)^2+(1-0,5)^2+(1-0,5)^2+(1-0.5)^2+(1-0.5)^2]½ = $\sqrt{1,38}$	$F_{d^2}(Q, I, 2/3) = \frac{2/3}{2/3 + \sqrt{1,38}} = 0,36$

Tabla 2. Determinación de los punto frontera Intra-Inter e Inter-Trans

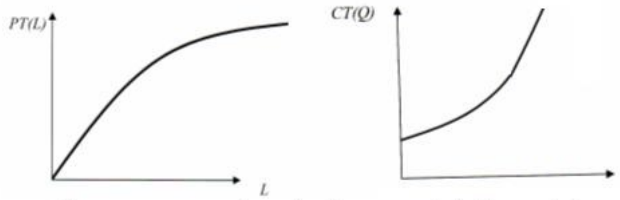
4. Resultados y/o conclusiones

- **Características de los alumnos en el nivel INTRA**

Los alumnos encuadrados en este nivel, que tienen una medida fuzzy menor a 0.27, se caracterizan fundamentalmente por establecer las relaciones entre una función y su derivada en ambos registros de modo incorrecto. A modo de ejemplo, el protocolo de respuesta de la figura 1 muestra relaciones incorrectas entre las funciones económicas Función de Producción o Producto Total y Producto Marginal (función y su derivada respectivamente) y también entre las funciones económicas Coste Total y Coste Marginal (función y su derivada). En el primero de los casos el alumno representa la función de Producto Marginal como una función creciente cuando debe ser decreciente dada la función de Producto Total. Por su parte en el segundo caso este alumno representa una función de Coste Marginal constante cuando debe ser una función creciente dada la función de Coste Total. Además el alumno no construye las expresiones algebraicas que podrían corresponderse con las funciones dadas gráficamente.

Tarea 3

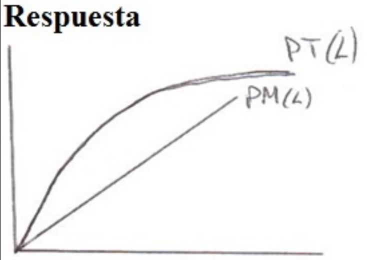
Las Funciones de Coste Total (CT(Q) y Producto Total (o Función de Producción, PT(L)) a las que se enfrenta un empresario en el corto plazo utilizando dos unidades de capital vienen definidas por las siguientes figuras:



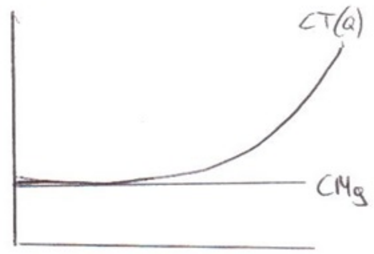
3.1) Obtén la gráfica y expresión algebraica del Coste Marginal CM(Q). Argumenta [utilizando la 2ª derivada, las gráficas y las expresiones algebraicas de la función Coste Total CT(Q) presentada y su CM(Q)] si la función CT(Q) es cóncava o convexa, explicando qué implica una u otra forma.

3.2) Contesta a la misma pregunta respecto a la función Producto Total PT(L) presentada y su Producto Marginal PM(L)

Respuesta



Como en el caso anterior pero de forma inversa el PMg debe ir por debajo de la curva PT hasta el punto donde se crucen y no exista ya incentivo a seguir produciendo.



Los costes totales parten de los CMg, por ello siempre indican su inicio la función lineal totalmente elastica en todo su recorrido.

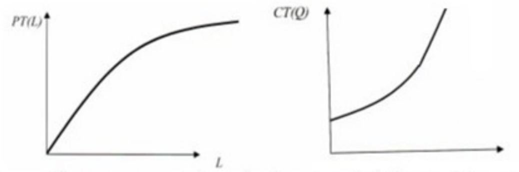
Figura 1. Relaciones incorrectas entre el PT y su derivada (PM) y entre el CT y su derivada (CM)

- **Características de los alumnos en el nivel INTER**

Los alumnos encuadrados en este nivel, que tienen una medida fuzzy mayor o igual a 0.27 pero menor que 0.36, se caracterizan fundamentalmente por establecer las relaciones entre una función y su derivada en ambos registros de modo correcto. A modo de ejemplo, el protocolo de respuesta de la figura 2 muestra relaciones correctas entre las funciones económicas Función de Producción o Producto Total y Producto Marginal (función y su derivada respectivamente) y también entre las funciones económicas Coste Total y Coste Marginal (función y su derivada). En el primero de los casos el alumno representa la función de Producto Marginal como una función decreciente. Por su parte en el segundo caso este alumno representa una función de Coste Marginal creciente y lineal. Además el alumno construye expresiones algebraicas correctas que podrían corresponderse con las funciones dadas gráficamente, y calcula segundas derivadas algebraicamente, pero no explica el significado económico de la concavidad y convexidad.

Tarea 3

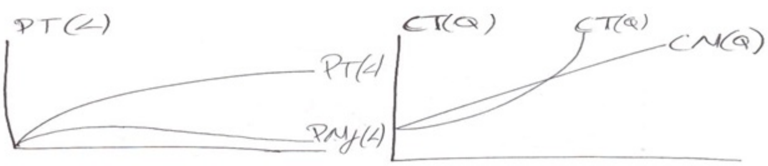
Las Funciones de Coste Total (CT(Q) y Producto Total (o Función de Producción, PT(L)) a las que se enfrenta un empresario en el corto plazo utilizando dos unidades de capital vienen definidas por las siguientes figuras:



3.1)Obtén la gráfica y expresión algebraica del Coste Marginal CM(Q). Argumenta [utilizando la 2ª derivada, las gráficas y las expresiones algebraicas de la función Coste Total CT(Q) presentada y su CM(Q)] si la función CT(Q) es cóncava o convexa, explicando qué implica una u otra forma.

3.2)Contesta a la misma pregunta respecto a la función Producto Total PT(L) presentada y su Producto Marginal PM(L)

Respuesta



PMg(L)

$PT(L) = \sqrt{x}$

$PMg = (x^{1/2})'$

$= (\frac{1}{2} x^{-1/2})$

$PMg = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si le damos valores a la x observemos que:

$y = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$

$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}28$

$y = \frac{1}{2\sqrt{10}} = 0{,}15$

CM(Q)

$CT(Q) = Q^2$ (exponencial)

$CMg(Q) = (Q^2)'$

$CMg(Q) = 2Q$ (lineal creciente)

la segunda derivada sería una función creciente, no cóncava, no convexa lineal.

→ la 2ª derivada

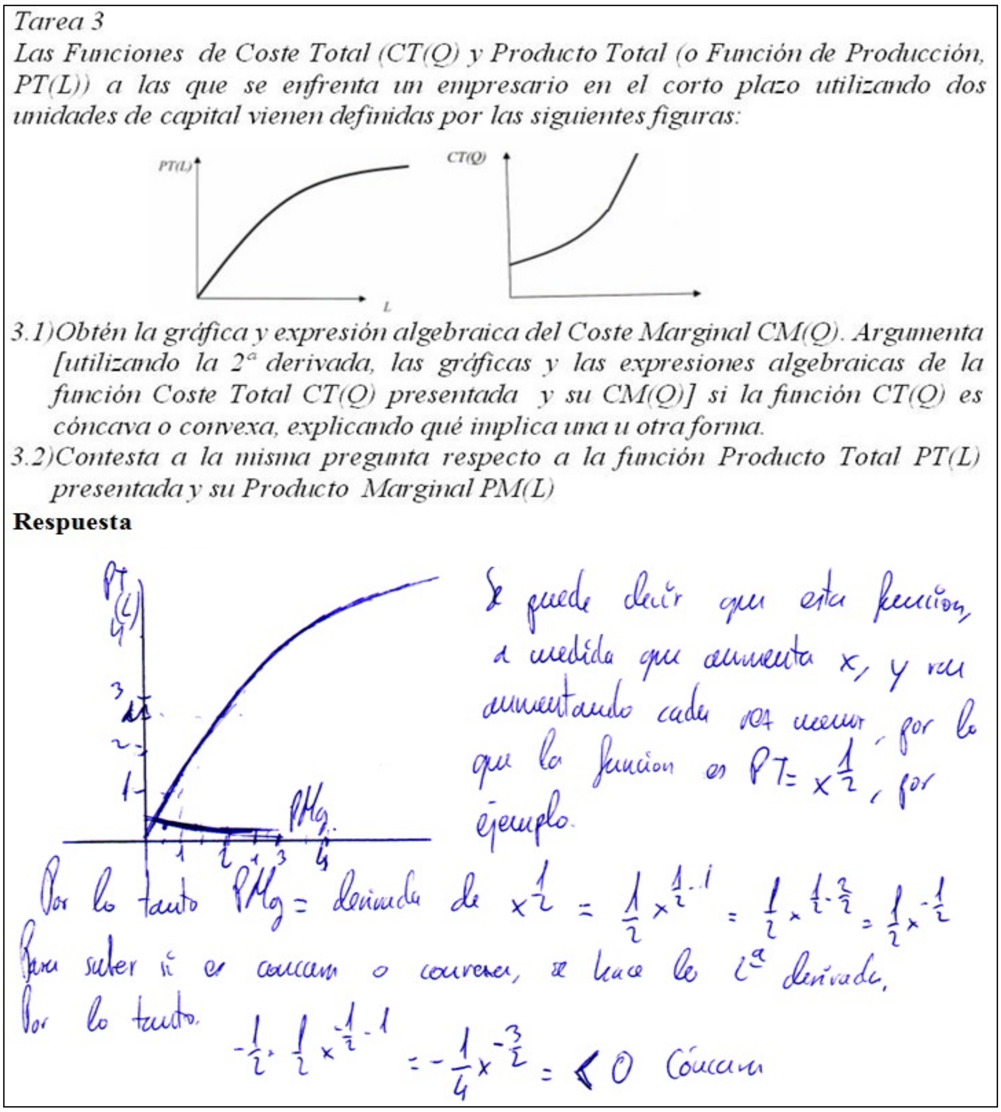
$= 0 \cdot x^{-1/2} + \frac{1}{2}(\frac{-1}{2}) x^{-1-1/2}$

$= \frac{-1}{4} x^{1/2} = -1/4 \sqrt{x}$

Figura 2. Relaciones correctas entre el PT y su derivada (PM) y entre el CT y su derivada (CM)

- **Características de los alumnos en el nivel TRANS**

Los alumnos asignados a este nivel, cuya medida fuzzy es mayor o igual a 0.36, se caracterizan por, además de establecer relaciones entre una función y su derivada correctamente en funciones económicas, aplicar correctamente la relación con la segunda derivada y entender el significado de concavidad o convexidad de una función económica. Por ejemplo, en la respuesta de la figura 3, el alumno además de representar correctamente la función de Producto Marginal (derivada) y construir expresiones algebraicas para ésta y la función origen de Producto Total, argumenta a través del cálculo de la segunda derivada que la función origen es cóncava y afirma que económicamente la concavidad implica que la función crece cada vez menos


Tarea 3

Las Funciones de Coste Total (CT(Q) y Producto Total (o Función de Producción, PT(L)) a las que se enfrenta un empresario en el corto plazo utilizando dos unidades de capital vienen definidas por las siguientes figuras:

3.1)Obtén la gráfica y expresión algebraica del Coste Marginal CM(Q). Argumenta [utilizando la 2ª derivada, las gráficas y las expresiones algebraicas de la función Coste Total CT(Q) presentada y su CM(Q)] si la función CT(Q) es cóncava o convexa, explicando qué implica una u otra forma.

3.2)Contesta a la misma pregunta respecto a la función Producto Total PT(L) presentada y su Producto Marginal PM(L)

Respuesta

Se puede decir que esta función, a medida que aumenta x, y va aumentando cada vez menos, por lo que la función es $PT = x^{\frac{1}{2}}$, por ejemplo.

Por lo tanto PMg = derivada de $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

Para saber si es cóncava o convexa, se hace la 2ª derivada.

Por lo tanto. $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = < 0$ Cóncava

*Figura 3. Explicación del significado económico de la resolución algebraica de la segunda derivad*a de una función.

Estas características indican pautas para pasar de un nivel a otro, lo que nos permite definir una trayectoria de cambio de nivel. Para superar el nivel Intra y situarse en el Inter estas pautas son:
Aprehender a manejar el concepto de la 1ª derivada en el registro gráfico fundamentalmente y con conversiones del registro gráfico al algebraico.
Calcular la 2ª derivada en el registro algebraico.

Por su parte, para avanzar del nivel Inter al Trans los alumnos deben:
Entender los significados de concavidad y convexidad en las situaciones económicas y ponerlos en relación con el cálculo algebraico de la 2º derivada.

5. Contribuciones y significación científica de este trabajo:

Este trabajo pretende ser un diagnóstico del nivel de comprensión que manifiestan alumnos universitarios sobre los conceptos económicos, bajo la óptica de la didáctica de la matemática. Creemos que un adecuado proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general y de las matemáticas particularizadas en materias como la Microeconomía en particular genera unos niveles de desarrollo de la comprensión de los conceptos económicos más avanzados, como así ha mostrado este trabajo.

6. Bibliografía

Akihito, A. (2006). Teaching Marginal Analysis: On the importance of emphasising the second-order condition. *International Reviewer of Economics Education*, 5(1), 46-59

Boyd, D. (1998). On the Use of Symbolic Computation in Undergraduate Microeconomics Instruction. *Journal of Economic Education*, 29(3), 227-246

Cohn, E. (2001). Do Graphs Promote Learning in Principles of Economics? *Journal of Economic Education*, 32(4), 299-310

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), 85-116.

George, A. y Veeramani, P.V. (1994). On some results in fuzzy metric spaces*. Fuzzy Sets and Systems,* 64, 395-39

Hey, J.D. (2005). I Teach Economics, Not Algebra and Calculus. *Journal of Economic Education*. 36(3), 292-304

Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores